

MODELAGEM MATEMÁTICA E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO: UMA DISCUSSÃO SOBRE REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

ROGÉRIO MARQUES RIBEIRO¹

ARTHUR BELFORD POWELL²

RESUMO

Apresentamos, neste artigo, algumas reflexões acerca de uma pesquisa que buscou, por meio de uma interlocução entre a Modelagem Matemática e as discussões sobre o conhecimento profissional do professor, problematizar o uso de representações matemáticas pelos professores que ensinam matemática nos anos iniciais. A produção de dados foi realizada a partir da observação dos encontros de uma formação continuada para professores que atuam nesse nível de ensino. Destacamos, assim, que essa investigação está alicerçada pelos princípios da pesquisa-ação, tendo as gravações em áudio e vídeo dos encontros, além do uso de questionários e entrevistas com os participantes, como principais instrumentos utilizados para a coleta de dados. Para a análise desses dados utilizamos o método da análise de conteúdo, e os resultados nos permitiram considerar que a Modelagem Matemática, na formação continuada de professores, contribuiu não apenas para discutir o conhecimento matemático para o ensino mobilizado por eles, mas também possibilitou que compreendêssemos como esses professores reconhecem os problemas que envolvem conteúdos matemáticos e suas representações. Esses resultados apresentam, ainda, evidências de que uma formação continuada sob a ótica da Modelagem Matemática contribui para o conhecimento matemático para o ensino.

PALAVRAS-CHAVE: CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO; FORMAÇÃO DOCENTE; MODELAGEM MATEMÁTICA; REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS.

MODELADO MATEMÁTICO Y EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA EL ENSEÑO: UNA DISCUSIÓN SOBRE REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN CONTINUADA DE LOS PROFESORES QUE ENSEÑAN MATEMÁTICA

RESUMEN

Presentamos, en este artículo, algunas reflexiones acerca de una pesquisa que buscó por medio de una interlocución entre el Modelado Matemático y las discusiones sobre el conocimiento profesional del profesor, problematizar el uso de representaciones matemáticas por los profesores que enseñan matemática en los años iniciais. La producción de datos fue realizada desde la observación de encuentros de una formación continuada para profesores que actúan en este nivel de enseñanza. Destacamos, así, que esta investigación se fundamenta por los principios de la pesquisa acción, teniendo las grabaciones en audio y video de los encuentros, además del uso de cuestionarios y

1 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.

2 Departamento de Educação Urbana da Rutgers University

entrevistas con los participantes, como principales instrumentos utilizados para recoger los datos. Para el análisis de estos datos utilizamos el método de análisis de contenido y los resultados nos permitió considerar que el Modelado Matemático, en la formación continuada de los profesores, ha contribuido no solo para discutir el conocimiento matemático para el ensino movilizado por ellos, mas también possibilitó que comprendiéramos como estos profesores reconocen los problemas que involucran contenidos matemáticos y sus representaciones. Estos resultados presentan, aún, evidencias de que una formación continuada sobre la óptica del Modelado Matemático contribuya para el conocimiento matemático y para el ensino.

PALABRAS CLAVE: CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA EL ENSEÑO; FORMACIÓN DOCENTE; MODELADO MATEMÁTICO; REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS.

MATHEMATICAL MODELING AND MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING: A DISCUSSION ON MATHEMATICAL REPRESENTATIONS IN THE CONTINUING EDUCATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS

ABSTRACT

This paper brings a few reflections about a research that sought, by establishing a connection between Mathematical Modeling and the discussions on the professional background of teachers, to question the use of mathematical representations by teachers of mathematics in early education. The data were collected from the observation of meetings of a continuing education program for teachers who work in this level of education. Therefore, this study is based on the principles of action research, with the audio and video recordings of the meetings, and the questionnaires and interviews held with the participants, as the main instruments used for data collection. These data were analyzed based on the content analysis method, and the results allowed us to consider that Mathematical Modeling in the continuing education of teachers contributed not only to discuss their mathematical knowledge for teaching, but also allowed us to understand how these teachers recognize problems involving mathematical contents and their representations. These results also bring evidence that continuing education, from the Mathematical Modeling perspective, contributes to the mathematical knowledge for teaching.

KEY WORDS: MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING; TEACHER EDUCATION; MATHEMATICAL MODELING; MATHEMATICAL REPRESENTATIONS.

INTRODUÇÃO

No presente trabalho está em foco uma discussão sobre a formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais³. Essa formação, que foi oferecida para professores da rede pública de São Paulo, teve como temática a prática de Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem, na perspectiva discutida por Barbosa (2001, 2002), e que se configurou como o cenário de investigação a essa formação, caracterizado como sendo a etapa em que o

3 Utilizamos a expressão “professores que ensinam matemática nos anos iniciais” para nos referirmos aos professores que ministram aulas nos anos iniciais do Ensino Fundamental I.

pesquisador teve a oportunidade de interagir com os sujeitos envolvidos na pesquisa.

Nesse ambiente, oferecemos situações de aprendizagem para que os professores pesquisassem, analisassem e descobrissem relações entre objetos matemáticos, procurando identificar as propriedades inerentes aos mesmos, articulando conceitos, procedimentos e representações matemáticas. As atividades propostas nos permitiram realizar uma leitura sobre o conhecimento didático-matemático mobilizado pelo professor, bem como observar suas concepções sobre as representações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem, o que nos foi importante na hora de decidir sobre as possíveis inferências a serem realizadas ao longo das discussões dentro do grupo.

A referida formação continuada norteou-se pelo sistema de categorias para a análise do conhecimento do professor de matemática, chamado de Conhecimento Didático-Matemático, proposto por Godino (2009), o qual tomamos como elemento de análise para nossa investigação, pelos estudos apresentados por Pino-Fan e Godino (2015), Pino-Fan, Assis e Castro (2015), que têm como foco o Conhecimento Didático-Matemático, assim como pelas perspectivas sobre Modelagem Matemática discutidas por Barbosa, (2001, 2002) e Caldeira (2009). Ressaltamos, ainda, que as ações e atividades propostas aos professores tiveram a intenção de promover reflexões sobre a prática deles, bem como fomentar discussões sobre os conhecimentos didático-matemáticos para o ensino da matemática.

Alguns elementos destacados por Godino (2009), Pino-Fan e Godino (2015), Pino-Fan, Assis e Castro (2015) como fundamentais ao conhecimento didático-matemático para o ensino de matemática mostraram-se fortemente presentes ao longo da formação oferecida como, por exemplo, a escolha de uma melhor representação para uma ideia matemática específica, a partir das representações propostas pelos professores, buscando caminhos para tornar o conteúdo mais compreensível para os alunos.

Nesse sentido, concordamos com Stylianou (2010), quando afirma que as representações matemáticas são “uma parte vital na explicação que os professores fazem de novos conceitos, ilustrações nos processos de resolução de problemas e na criação de ligações entre conceitos” (p. 329), além de concordar com a ideia de que o entendimento do professor sobre as representações matemáticas influencia sua prática de sala de aula, o que implica, diretamente, na aprendizagem dos alunos.

Ao longo deste artigo apresentamos algumas discussões sobre essas respectivas áreas, bem como as interlocuções percebidas entre elas e que contribuíram para o conhecimento didático-matemático para o ensino dos professores que participaram da formação oferecida.

A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS

O programa de formação continuada, que fez parte de nosso estudo, teve como característica particular ter sido implementado como um ambiente de aprendizagem, na perspectiva da Modelagem (BARBOSA, 2001, 2002), e contou com a participação de um grupo de professoras⁴ que ensinam matemática nos anos iniciais da rede pública estadual de São Paulo.

4 Utilizaremos o termo “professoras” para nos referirmos às professoras que ensinam matemática nos anos iniciais, que são os sujeitos da pesquisa.

A formação foi idealizada por um dos autores deste estudo e oferecida nas dependências da Instituição de Ensino Superior onde ele leciona. Ela foi realizada em encontros semanais presenciais, aos sábados, e contou com uma carga horária total de quarenta horas. Apesar de nossa surpresa inicial de ter trinta professores inscritos para o curso, e da expectativa de ter um número elevado de professores ao longo da formação, já no primeiro encontro contamos com a presença de apenas vinte deles. A quantidade de professores participantes ainda diminuiu ao longo dos encontros seguintes e, ao finalizar a formação, contávamos com a participação de sete professoras.

A redução no número de participantes não gerou motivo de preocupação em relação aos objetivos de nosso estudo, pois, desde o início de nossa proposta de investigação, já adotávamos os pressupostos apresentados por Minayo (1994) sobre os critérios básicos para a delimitação de uma amostra dos sujeitos em uma pesquisa qualitativa. Esse autor argumenta que a amostra ideal para uma pesquisa qualitativa deve ser aquela capaz de refletir a totalidade do problema investigado em suas diferentes dimensões.

Nessa concepção, a preocupação com a delimitação da amostra não deve ser baseada no critério numérico para assegurar a sua representatividade, mas sim no conteúdo das observações, da análise das discussões realizadas no interior do grupo e das ações das professoras, de maneira que esses elementos possam refletir o conjunto das experiências delas, que são os sujeitos de nossa investigação.

Em sua maioria, as professoras que participaram dessa formação possuíam formação em Magistério ou Licenciatura em Pedagogia e, geralmente, esses cursos possuem uma carga horária não adequada para tratar dos conteúdos específicos de matemática.

Uma das implicações dessa não adequada carga horária, destacada por pesquisadores como Curi (2005), Nacarato, Mengali e Passos (2009), entre outros, é a forma como esses professores exercem sua prática da docência em sala de aula. Para essas pesquisadoras, é fato encontrar professores que abordam os conteúdos de matemática em sala de aula apenas como reproduções do que vivenciaram enquanto estudantes. Para Nacarato, Mengali e Passos (2009), por exemplo, essa formação

faz com que a professora – principalmente nos primeiros anos de docência – reproduza os modelos que vivenciou como estudante. Se tais modelos não forem problematizados e refletidos, podem permanecer ao longo de toda trajetória profissional. Isso contribui para a consolidação não apenas de uma aula pautada numa rotina mais ou menos homogênea do modo de ensinar matemática, mas também de um currículo, praticado em sala de aula, bastante distante das discussões contemporâneas no campo da educação matemática (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p. 32).

Essa ideia é corroborada pelos trabalhos de Ball (1991), quando ela afirma que “o conhecimento que os professores têm dos conteúdos matemáticos interage com suas suposições e crenças sobre ensino e aprendizagem, alunos, e caminhos para ensiná-los” (BALL, 1991, p. 1) [tradução nossa].

Para essa autora, quando o professor desconhece, ou mesmo desconsidera essas ideias, isso pode ser uma explicação para o fato de alguns professores ensinarem matemática da mesma forma como eles aprenderam. Essas ideias também podem ser verificadas no trabalho de Curi (2005), quando a autora afirma que:

sendo o professor polivalente o responsável pela 'iniciação' das crianças em matemática, pela abordagem de conceitos e procedimentos importantes para a construção de seu pensamento matemático, a sua formação, específica para essa tarefa, é tema de grande prioridade na área de Educação Matemática (CURI, 2005, p. 21).

Outro aspecto importante a ser considerado, agora na formação continuada de professores, em particular para os que ensinam matemática nos anos iniciais, é destacado nos estudos de Nacarato, Mengali e Passos (2009). Para as autoras, ao iniciarem-se na docência, os professores trazem crenças já internalizadas sobre o que seja matemática, seu ensino e sua aprendizagem, e, como essas crenças são construídas historicamente, passa a ser importante

analisar, em cursos de formação, a trajetória profissional dos professores, buscando identificar quais são essas crenças e como elas podem ser trabalhadas para ser rompidas e/ou transformadas (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p. 24).

Ao concordar com as afirmações dessas autoras, também corroboramos a ideia de que um sistema de crenças já arraigadas, que enxerga o ensino e a aprendizagem da matemática com ênfase no detalhamento dos conteúdos e no uso de algoritmos, numa concepção reducionista da matemática, ou seja, reduzindo-a a procedimentos de cálculo, deve ser rompido por meio de estratégias de formação que contribuam para desconstruir essas crenças.

Consequentemente, uma das ações para uma mudança na postura do professor pode ser vislumbrada por meio de uma formação continuada que possibilite o oferecimento de condições para um desenvolvimento pessoal e profissional, em termos de construção de conhecimentos, que favoreça respostas às necessidades reais colocadas pela ação educativa, estimulando uma relação mais íntima com a profissão docente, e não apenas que seja apresentada como uma proposta externa de modificação de procedimentos e de atitudes pedagógicas, supondo que por si só possam assegurar a eficácia daqueles que a adotem.

Sendo assim, ao aceitar a necessidade dessas ações em sala de aula, devem-se repensar as formas para se oferecer uma formação continuada que atenda às expectativas que apresentamos até o momento. Nesse sentido, os trabalhos realizados por esses autores, bem como suas conclusões e considerações a respeito da área de formação de professores, foram determinantes para nossa orientação e planejamento do programa de formação continuada para professores que ensinam matemática nos anos iniciais, e que fez parte deste estudo.

Alguns dos autores que trouxemos para este diálogo, como Curi (2005), Nacarato, Mengali e Passos (2009) e Ball (1991, 2000), realizaram suas pesquisas colocando o foco na importância de se discutir a formação matemática do professor que ensina matemática nos anos iniciais, além de apresentarem discussões sobre algumas questões relacionadas a esse foco, como, por exemplo, questões relacionadas aos conteúdos a serem explorados, às metodologias que podem ser adotadas, ao uso de representações matemáticas, o próprio aprofundamento matemático dos conteúdos, entre outras.

Outros autores, como Valério (2005), Canavarro (2011) e Vale (2012), discutem, em suas pesquisas, outros aspectos da formação e da prática do professor, que também contribuíram para a nossa investigação. Apesar de suas pesquisas não focarem, especificamente, a formação matemática do professor, elas apresentam significativos resultados em questões que envolvem a

prática docente, como, por exemplo, o papel das representações na construção da compreensão matemática, a resolução de tarefas envolvendo múltiplas resoluções e representações para a compreensão de conceitos matemáticos, a influência das crenças e concepções do professor em sua prática profissional, entre outros elementos.

Buscando apresentar uma melhor compreensão das ideias que utilizamos ao longo desse trabalho, passamos a descrever nossos referenciais sobre Modelagem Matemática, sobre as Representações e a Construção da Compreensão Matemática, bem como sobre o Modelo do Conhecimento Didático-Matemático.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao nos enveredarmos pela literatura acerca da área da Modelagem⁵ na Educação Matemática, observamos que essa área tem apresentado um número crescente de trabalhos nas últimas décadas. Entretanto, apesar desse aumento no número de investigações envolvendo essa temática, o trabalho realizado por Tambarussi e Klüber (2014) revela que as pesquisas *stricto sensu* que discutem, especificamente, a formação de professores e a Modelagem, ainda são bastante recentes. Esses autores, em sua investigação, constataram que as pesquisas que possuem esse foco só começaram a ser produzidas no Brasil no ano de 2001, o que corrobora o fato de que as investigações nessa área caracterizam-se como um campo ainda muito recente.

Ainda que tenhamos essa constatação, a área de Modelagem tem-se solidificado enquanto importante campo teórico e de investigação, como bem destacam Souza e Barbosa (2014, p. 32), ao afirmarem que “as argumentações a respeito das implicações do uso da modelagem no contexto escolar e acadêmico para a aprendizagem matemática resultaram em sua consolidação como campo de pesquisa na área da Educação Matemática”.

Entre os muitos pesquisadores que têm realizado seus trabalhos nessa área, destacamos Caldeira (2009), que apresenta, em suas investigações, sua crença de que a Modelagem não deve ter a preocupação de reproduzir os conteúdos matemáticos que são elencados no currículo. Entretanto, segundo ele, isso não significa que se devem perder os conceitos da matemática escolar. Compartilhamos desse pensamento de Caldeira e, por essa razão, ao longo de nossa formação continuada oferecida, as atividades propostas não apresentavam uma linearidade em relação à apresentação dos conteúdos matemáticos que seriam discutidos. No entanto, não deixamos de lado a importância de discutir os conceitos matemáticos mobilizados para a resolução das atividades. Para este artigo, particularmente, destacaremos algumas das discussões que envolveram o papel das representações e suas manipulações por parte dos professores participantes.

Para essa formação continuada que oferecemos, consideramos a Modelagem como um sistema de aprendizagem (CALDEIRA, 2009) que possibilita questionar os conteúdos matemáticos, ao mesmo tempo em que se fomenta a sua compreensão, ou seja, ela deve ser vista numa concepção maior do que apenas como uma alternativa ou metodologia de ensino.

Ao concordar com as discussões propostas por esse autor, vamos ao encontro das ideias de

5 Passaremos a utilizar o termo Modelagem para nos referirmos à Modelagem Matemática na Educação Matemática, como meio de evitar repetições.

Barbosa (2002, 2006, 2007), que compreende que a Modelagem pode ser legitimada dentro de uma proposta curricular que priorize os espaços escolares como um ambiente de aprendizagem, a partir da promoção desses ambientes como amplos espaços para investigação, análise e discussão de problemas que transitam por vários campos do conhecimento ou do dia a dia.

Em nossa investigação, a partir dessas considerações, fizemos uso da Modelagem para fomentar a discussão sobre as crenças e concepções dos professores acerca da matemática e seu ensino, haja vista que concordamos com Barbosa (2001a, p. 5) quando ele destaca que, para isso, “uma vez que as concepções são formadas no conjunto das experiências, deve-se utilizar destas para desequilibrar as concepções arraigadas”. Consideramos, dessa forma, que a formação continuada de professores precisa potencializar os diálogos sobre as experiências vividas por eles, uma vez que, de acordo com Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999, p. 38),

O ponto de partida da formação continuada do professor [...] não é a teoria ou o conjunto das produções dos especialistas, dos quais o professor é supostamente carente, mas sim a própria prática pedagógica do professor, seus saberes da experiência, seus problemas, suas necessidades e sobretudo aquilo que ele pode ou desejaria desenvolver e aprimorar.

A partir do desenvolvimento dessa formação, a nosso ver, a Modelagem, como um ambiente de aprendizagem, se apresentou como um cenário muito favorável para fomentar as discussões necessárias para se investigar o conhecimento que é mobilizado pelos professores ao longo de uma formação continuada, o que permitiu, ainda, que compreendêssemos como esses professores reconhecem os problemas que envolvem conteúdos matemáticos e suas representações.

AS REPRESENTAÇÕES E A CONSTRUÇÃO DA COMPREENSÃO MATEMÁTICA

é comum, em nosso dia a dia, lançarmos mão do uso de esquemas, figuras ou mesmo desenhos como meios para solucionar problemas com os quais nos deparamos. A busca por esses elementos, de fato, tem uma função importante para os indivíduos, pois eles servem para alicerçar nossos pensamentos.

Quando nos referimos ao uso desses elementos e, em particular, para resolver problemas que envolvem a matemática, estamos nos referindo às representações matemáticas que, não necessariamente, são as mesmas utilizadas por diferentes pessoas.

Ao pensar no ambiente escolar, podemos afirmar que o uso de representações faz parte do processo de ensino e aprendizagem da matemática e, na escola, é comum o professor incentivar os seus alunos a utilizarem algum tipo de representação para melhor compreenderem conceitos matemáticos e/ou os ajudarem a obter a solução desejada para um determinado problema.

Alguns autores, como Valério (2005) e Stylianou (2010), destacam a importância da discussão acerca do papel das representações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem, haja vista que o uso das representações contribuem não apenas para se obterem informações sobre como os alunos pensam, mobilizam e explicitam seus conhecimentos construídos, mas, sobretudo seu uso pode ser visto como um recurso para os professores.

Entendemos, ainda, que o processo de construção de representações matemáticas pelos alunos, assim como sua formalização, evidencia, sobretudo, as influências do professor em sala de aula, o que nos leva a considerar a importância de se investigar como os professores explicitam os seus usos das representações quando estão resolvendo problemas, uma vez que suas crenças e concepções, acerca desse uso, serão levadas para sua sala de aula e, conseqüentemente, impactam em suas ações para o ensino de matemática. Concordamos, assim, com a ideia de que o professor deve ser capaz, por exemplo,

de mobilizar várias representações de um objeto matemático para resolver uma tarefa por meio de procedimentos diferentes; para relacionar objetos matemáticos com outros objetos matemáticos ensinados em um determinado nível de ensino ou de níveis anteriores ou futuros; de compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um único objeto matemático (PINO-FAN; GODINO, 2015, p. 99) [tradução nossa].

Podemos observar, dessa forma, que o conhecimento didático-matemático do professor para o ensino deve possibilitar a ele, entre outros fatores, fazer escolhas de modelos ou exemplos úteis, bem como fazer analogias com o que está sendo discutido. Para Pino-Fan e Godino (2015), realizar essas atividades requer percepção e entendimento matemáticos adicionais, que vão além de apenas conhecer o conteúdo que irão ensinar, o que implica que eles precisam ter um conhecimento especializado do conteúdo para poder ensinar.

Em particular, quando nos referimos à formação oferecida, e que fez parte de nossa investigação, podemos afirmar que o formador procurou, sempre que possível, instigar as professoras a explicitarem suas ideias matemáticas, crenças e concepções, e mesmo quando elas explicitavam concepções erradas acerca de algum tema, o formador não corrigia de imediato as suas considerações.

Em nosso entendimento, essa decisão, por parte do formador, contribuiu sobretudo para que as professoras comparassem e descrevessem os seus métodos, haja vista serem esses importantes elementos para a construção do próprio conhecimento. Essa postura vai ao encontro, ainda, do contexto da Modelagem no qual trabalhamos, pois, dentro desse contexto, é desejável que as professoras tenham um papel ativo na construção de seus conhecimentos relacionados às categorias do Modelo do Conhecimento Didático-Matemático para o Ensino e que, dessa maneira, aprendam matemática como uma realização, ou seja, matemática como um processo e não como uma ciência, pronta e acabada.

O MODELO DO CONHECIMENTO DIDÁTICO-MATEMÁTICO

O Modelo do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) é caracterizado por um sistema de categorias que é utilizado para analisar o conhecimento do professor de matemática. Esse sistema de categorias é referenciado por Godino (2009) como sendo um conjunto de conhecimentos que o professor deve conhecer, compreender, saber aplicar e avaliar. O Modelo do CDM buscou elementos em outros modelos que visam dar suporte para investigar e caracterizar o conhecimento do professor de matemática, como, por exemplo, o Modelo do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK⁶), de Shulman (1986, 1987) e o Modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT⁷) de Ball

6 Do inglês Pedagogical Content Knowledge.

7 Do inglês Mathematical Knowledge Teaching.

e seus colaboradores (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; HILL, BALL e SCHILLING, 2008), entre outros.

Godino (2009) reconhece os avanços que os trabalhos, como os citados acima, produziram para a caracterização das complexas estruturas que se propõem a investigar o conhecimento que os professores precisam ter para a sua prática de sala de aula. Entretanto, esse autor ressalta que

os modelos de Conhecimento Matemático para o Ensino criado a partir da pesquisa em Educação Matemática, incluem categorias que são demasiadamente globais e desarticuladas, de modo que seria útil ter modelos que permitissem uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que podem ser utilizados para um ensino eficaz da matemática. Além disso, permitiria orientar a concepção de ações de formação e a elaboração de instrumentos de avaliação de conhecimentos dos professores (GODINO, 2009, p. 19) [tradução nossa].

Com esse entendimento sobre os modelos que vinham sendo utilizados para caracterizar o conhecimento do professor de matemática, aliado ao seu interesse nas investigações acerca dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores, esse autor propôs o Modelo do CDM, o qual é utilizado para interpretar e caracterizar o conhecimento do professor a partir de três dimensões, a saber: a dimensão matemática; a dimensão didática; e a dimensão

metadidático-matemática. De forma mais pontual, descreveremos algumas das categorias relacionadas à dimensão didática do CDM, uma vez que essas categorias serão referenciadas por nós durante o processo de análise de um dos encontros de formação que descreveremos neste artigo.

CATEGORIA EPISTÊMICA

A categoria epistêmica é referenciada por Pino-Fan e Godino (2015) como sendo a que se ocupa do conhecimento especializado da dimensão matemática. Nesse sentido, ela propõe um conhecimento que vai além daqueles que são discutidos tanto pela categoria do conhecimento comum do conteúdo quanto pela categoria do conhecimento ampliado do conteúdo, ambas categorias da dimensão matemática citada.

Pino-Fan e Godino (2015) destacam que a categoria epistêmica envolve o conhecimento matemático que o professor necessita ter para o ensino. Nesse sentido, o professor deve ser capaz, por exemplo,

de mobilizar várias representações de um objeto matemático para resolver uma tarefa por meio de procedimentos diferentes; para relacionar objetos matemáticos com outros objetos matemáticos ensinados em um determinado nível de ensino ou de níveis anteriores ou futuros; de compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um único objeto matemático (PINO-FAN; GODINO, 2015, p. 99) [tradução nossa].

Podemos observar que o conhecimento relacionado a essa categoria deve possibilitar ao professor fazer escolhas de modelos, representações ou exemplos úteis, bem como fazer analogias com o que está sendo discutido. Para os autores, realizar essas atividades requer percepção e entendimento matemáticos adicionais, que vão além de apenas conhecer o conteúdo que irão ensinar, o que implica que eles precisam ter um conhecimento especializado do conteúdo para

poder ensinar.

CATEGORIA DE INTERAÇÃO

A Categoria de Interação destaca a importância de se considerar as interações como um componente essencial para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Pino-Fan e Godino (2015) descrevem essa categoria como sendo a que se refere ao conhecimento das interações que acontecem, por exemplo, no interior de uma sala de aula.

Essas interações dizem respeito não somente àquelas que ocorrem entre o professor e o aluno, mas também àquelas que podem ocorrer entre os próprios alunos, entre os alunos e os recursos didáticos, bem como às interações professor-recursos-alunos. Pino-Fan, Assis e Castro (2015) ressaltam que os conhecimentos relacionados a essa categoria compõem, assim, o campo de relações que sustentam o processo de aprendizagem.

CATEGORIA DE MEDIAÇÃO

Essa categoria está relacionada com os conhecimentos que o professor necessita para avaliar a pertinência do tipo de materiais e de recursos tecnológicos, assim como avaliar a pertinência do seu uso, para promover a aprendizagem dos alunos sobre um objeto matemático específico. Para Pino-Fan e Godino (2015), o conhecimento sobre os recursos didáticos desempenha um importante papel na organização e gestão da aprendizagem dos alunos.

A partir da breve descrição que realizamos sobre a Modelagem Matemática, sobre as Representações e a Construção da Compreensão Matemática, bem como do Modelo do Conhecimento Didático-Matemático, apresentamos, a seguir, a descrição e análise de um dos encontros de formação oferecida, o qual nos permitiu realizar as articulações entre esses elementos e o encontro de formação.

DESCREVENDO E ANALISANDO UM DOS ENCONTROS DE FORMAÇÃO

Para este artigo, optamos por trazer um recorte de um dos encontros de formação, no qual podemos apresentar algumas das articulações que buscamos realizar envolvendo as representações e algumas das categorias do Modelo do Conhecimento Didático-Matemático proposto por Godino (2009). Ao iniciar esse encontro, o formador retomou as discussões sobre a prática das professoras participantes da formação sobre as figuras geométricas.

As professoras demonstraram, em encontros anteriores, dificuldades para lidar com esse assunto, e por isso o formador procurou aprofundar as discussões sobre ele. Ao retomar esse assunto, o formador questionou as professoras sobre o desenvolvimento do trabalho delas, em sala de aula, envolvendo os quadriláteros. Em um encontro anterior o formador chegou à definição de quadriláteros, juntamente com as professoras, mas naquela oportunidade não aprofundaram as discussões sobre esse tema.

Ao iniciar esse encontro algumas das professoras afirmaram que desenvolviam trabalhos em sala de aula com os quadriláteros, e assim o formador observou uma oportunidade para fomentar uma discussão sobre os quadriláteros notáveis, por meio da seguinte indagação: “Em relação aos

conhecimentos de vocês sobre essa discussão. Vocês sabem quais são os quadriláteros notáveis e quais são as suas características?”

A partir desse questionamento, feito pelo formador, as professoras disseram que não sabiam explicar. Então, como meio de instigar as professoras a se envolverem nessa discussão, o formador apresentou um novo questionamento: “Quem pode me falar o nome de um quadrilátero notável?” E então a professora Evelyn⁸ respondeu: “O quadrado eu acho que é”. E a professora Milena também complementou: “O retângulo”.

As respostas das professoras evidenciaram duas questões importantes para nossa discussão: a primeira se refere ao fato de elas conhecerem exemplos de quadriláteros notáveis, mas não demonstrarem conhecer a razão de esses elementos serem classificados dessa forma; a segunda diz respeito à insegurança delas na hora de afirmar que essas figuras geométricas são classificadas como quadriláteros notáveis. Na fala da professora Evelyn nós podemos encontrar um exemplo dessa insegurança. A Professora Ana também mostrou muita insegurança, quando comentou: “Eu também acho que é o retângulo. Mas não sei explicar o por quê”.

A partir das falas das professoras, o formador propôs uma discussão acerca dos quadriláteros notáveis, apresentando suas propriedades e particularidades para que algumas figuras geométricas pudessem ser classificadas como quadriláteros notáveis, até se chegar à sua definição.

Apesar de essa ter sido uma discussão muito importante para a formação, e as professoras terem demonstrado um grande envolvimento durante a apresentação, optamos por aprofundar nossas discussões sobre esse encontro a partir de uma outra situação ocorrida nesse dia. Essa discussão se refere à classificação dos quadriláteros.

Para essa discussão, o formador fez um esquema no quadro que podemos representar a seguir:

8 Para garantir o anonimato das professoras estamos utilizando apenas nomes fictícios.

Figura 6 - Relação entre os quadriláteros notáveis⁹.



Fonte: sítio da *internet*¹⁰.

Ao provocar a discussão com as professoras, o formador pediu que elas observassem a relação que era apresentada por meio do desenho, e essa provocação gerou o seguinte diálogo:

Formador: “Vamos falar então desse elemento. O paralelogramo. Vamos tratar agora sobre as propriedades e a definição desse objeto. Vocês já trabalharam com ele?” [o formador se refere ao paralelogramo]. “Mais ou menos”, responderam as professoras.

“Vocês podem me dar alguma característica dele?”, perguntou o formador, referindo-se ao paralelogramo. Nesse momento, a professora Milena, fazendo uma representação com as mãos, sugeriu que o paralelogramo possui dois pares de lados opostos paralelos, e complementa com a seguinte fala: “Mas só que são tortos, não é igual o retângulo”. E o formador, então, provoca mais um questionamento: “Mas ele pode ser na forma de um retângulo?” E algumas das professoras então respondem: “Eu acho que não”.

A postura da professora Milena, primeiro fazendo o gesto com as mãos, indicando que um par de lados opostos do paralelogramo precisa ter uma posição “inclinada”, e depois explicitando, em sua

9 Adotamos, para nosso trabalho, a definição de trapézio como sendo um quadrilátero em que há *pelo menos* um par de lados paralelos. Com essa definição, o paralelogramo, juntamente com o losango, o retângulo e o quadrado são compreendidos como tipos especiais de trapézio.

10 Disponível em <http://www.colegioweb.com.br/poligonos-quadrilateros-notaveis/relacoes-de-inclusao-entre-os-conjuntos-dos-quadrilateros-notaveis.html>. Acesso em: 15/11/2015.

fala, essa necessidade, atesta o que algumas pesquisas que discutem o ensino e a aprendizagem da geometria têm apontado sobre alguns obstáculos que surgem durante o ensino e a aprendizagem de conteúdos da geometria.

Dessa forma, observamos que as conclusões apresentadas pelas professoras, nesse diálogo, revela uma situação que pode ser associada aos obstáculos criados por meio das configurações geométricas. Para Pais (2000, p. 4), “há uma espécie de tradição, influenciada tanto pelo senso comum como pelos saberes escolares, de preservação dessa forma particular de representação”.

A preservação a que o autor se refere diz respeito à influência tanto de livros didáticos quanto das próprias aulas de matemática, em particular as aulas de geometria, que apresentam as representações de figuras geométricas sempre da mesma forma, ou seja, utilizando-se, sempre, das mesmas configurações geométricas, criando-se, praticamente, um estereótipo dessas figuras, de forma que a imagem mental do objeto matemático seja associada a apenas aquele tipo de representação a que ele foi submetido.

Pais (2000) cita um exemplo muito comum que pode ser encontrado na maioria dos livros didáticos. Esse exemplo se refere a quando temos um

triângulo isósceles não equilátero cujo desenho usual, geralmente, tem um de seus lados na posição horizontal, considerado como ‘a base’ do triângulo, cujo comprimento é um pouco menor do que a altura relativa a esta base horizontal (PAIS, 2000, p 5).

Para esse autor, situações como essa, em um momento de aprendizagem, demonstram como as configurações geométricas podem levar os alunos a sérios obstáculos durante a aprendizagem.

Preocupações como essas também podem ser observadas em trabalhos de autores como Passos (2013) e Amâncio e Gazire (2015), que afirmam que as situações que envolvem uma configuração geométrica precisam ser olhadas com atenção para que algumas figuras particulares não sejam compreendidas e utilizadas como verdadeiros estereótipos, haja vista que essa visão pode dificultar ou mesmo impossibilitar a formação de conceitos matemáticos.

Amâncio e Gazire (2015), ao apresentarem sua pesquisa acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico e as contribuições dos recursos didáticos no estudo dos quadriláteros, fazem uma explanação sobre o que eles chamam de “os quatro elementos fundamentais que influenciam no processo de ensino e aprendizagem da geometria: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem conceitual” (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015, p. 114). Particularmente, em relação às imagens mentais, os autores afirmam que

a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos. Cada pessoa possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. É importante que ao longo da escolaridade, o conjunto das imagens mentais seja enriquecido no aspecto quantitativo e qualitativo (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015, p. 115).

Esses autores ainda complementam suas afirmações ao ressaltarem que

a pouca experiência com manipulação de objetos, e os desenhos estereotipados, contribuem para que os alunos tenham imagens mentais reduzidas dos entes geométricos. Em geral, os losangos aparecem desenhados com as diagonais paralelas às bordas das páginas ou da lousa; já os retângulos

são desenhados com seus lados paralelos às bordas e o lado maior na horizontal, enquanto que os quadrados são frequentemente desenhados com os lados paralelos às bordas (AMÂNCIO; GAZIRE, 2015, p. 115).

As afirmações feitas por esses autores enfatizam a necessidade do desenvolvimento de um trabalho muito cuidadoso pelos professores quando se utilizam de recursos didáticos para a discussão e formação de conceitos matemáticos. Essa discussão está associada, do ponto de vista das categorias do Modelo do CDM, com as discussões acerca da Categoria de Mediação e da Categoria de Interação.

Esse diálogo com as professoras reafirma a importância de se problematizar o conhecimento das professoras em relação a essa categoria, devido à comprovação de sua influência no processo de ensino e aprendizagem.

O envolvimento das professoras nessas problematizações feitas pelo formador, bem como a associação que ele instiga que elas façam entre essas problematizações e suas práticas pedagógicas, contribuem para que elas se envolvam em um processo de reflexão sobre suas práticas.

Vamos reproduzir, a seguir, um outro momento dessa discussão, envolvendo as figuras geométricas:

Professora Evelyn: “Os lados são paralelos” [referindo-se ao paralelogramo].

Professora Milena: “O ângulo interno não pode ser igual ao do retângulo” [a professora se refere à sua crença de que os ângulos internos do paralelogramo não podem ser retos].

Formador: “Vamos pensar nessa discussão do ângulo interno. Nós fizemos aquele desenho [o formador se refere ao desenho de um paralelogramo que possui um par de lados opostos paralelos “inclinados”] quando nos referimos ao paralelogramo. Então, se eu tiver uma figura como esta [neste momento o formador desenha um paralelogramo e indica que cada ângulo interno tem a medida de 90°], ele não será um paralelogramo?”

A professora Milena é quem responde: “Ah, ele vai ser sim, porque ele está dentro daquela outra figura que você desenhou. Então ele é um retângulo, mas é um paralelogramo também” [a professora se refere ao esquema desenhado pelo formador – figura 6 anterior “Relação entre os quadriláteros notáveis” – onde o retângulo aparece como um subconjunto do paralelogramo].

Observamos que as falas de algumas professoras continuam a nos dar elementos para destacar que há dificuldades por parte delas em diferenciar as figuras geométricas. Passos (2000) relata um episódio ocorrido com professores dos anos iniciais que nos remete a uma situação muito semelhante a essa. Em sua descrição, ela relata que

os participantes, ao manipularem vários objetos com formas geométricas, tiveram dificuldades em diferenciá-las; por exemplo, chamavam de losango os paralelogramos que tinham lados diferentes. Além disso, apenas com movimentos rígidos no espaço, como o de rotação, consideravam que as figuras mudavam de classificação; por exemplo, um quadrado deixava de ser quadrado quando sua posição era modificada, isto é, quando sua posição era mudada, colocando-se um dos vértices na linha horizontal, era um losango; o mesmo acontecendo com paralelogramos não retângulos (PASSOS, 2000, p. 17).

Para a autora, situações como esta permitem a inferência de que alguns professores

demonstram a não conservação da forma dos quadriláteros por não possuírem o conceito correto do paralelogramo, ou seja, seus atributos essenciais [...] de maneira geral, observou-se que os participantes não demonstravam saber que os quadriláteros quadrado, retângulo e losango são paralelogramos (PASSOS, 2000, p. 18).

Durante esse encontro, as discussões sobre as classificações das figuras geométricas foram muito extensas e produtivas. Como as investigações que apresentamos apontam (PASSOS, 2000; PAIS, 2000; AMÂNCIO; GAZIRE, 2015), há muitas dificuldades associadas ao ensino e aprendizagem da geometria, tanto em relação aos professores quanto em relação aos alunos. Em particular, em relação aos professores, os autores destacam a pouca formação matemática e a pouca ênfase no ensino da geometria durante a formação inicial dos professores como fortes razões para essa constatação.

Em outro momento desse encontro, o formador fez o seguinte comentário: “Se você tem uma atividade e quer que seu aluno chegue à conclusão de que a figura que ele está trabalhando é um quadrado, mas ao invés disso ele responder para você que é um retângulo. Você acha que ele está errado?”

Professora Ana: “Eu acho que sim”.

Professora Milena: “Agora eu acho que não”. Mas se você falasse, para mim, que o quadrado é um retângulo antes dessa discussão, eu iria dizer que não, não é possível”.

Professora Thalita: “É uma coisa muito pincelada na sala de aula, a gente fica perdida” [a professora se refere ao ensino de matemática durante a graduação].

Professora Ana: “Eu também já tinha ouvido falar isso, mas agora eu entendi o porquê”.

O formador, então, faz alguns comentários sobre situações como essa que podem ocorrer em sala de aula, procurando ressaltar que o aluno pode não ter chegado à resposta pretendida, mas sua resposta não estava errada, pois todo quadrado é um retângulo. Durante esse diálogo, o formador buscou evidenciar a importância de o professor ter essa percepção e o conhecimento das relações entre esses objetos para lidar com situações como essas. Refletindo, inclusive, sobre a atividade proposta, pois pode ser que ela não fosse adequada para os objetivos pensados.

Ao se deparar com situações assim é necessário que seja investigado, ainda, o que levou o aluno a fazer esse tipo de classificação, ou seja, é preciso ser investigado qual foi o critério utilizado por ele para se chegar àquela resposta. Complementando as discussões, o formador comentou: “Veja a importância dessas discussões que estamos fazendo, porque se eu não tenho clareza e conhecimento das definições e classificações das figuras geométricas, eu vou dizer para ele que ele está errado, com base no que eu espero como resposta certa, e sem me preocupar com o que pode estar além da resposta dele.”

O formador, ainda buscando que as professoras explicitassem suas práticas de sala de aula, questiona: “E como vocês ensinam isso?” [referindo-se ao ensino dos quadriláteros]. A professora Evelyn respondeu:

Eu ensino da mesma forma que aprendi. O quadrado é um quadrado e o retângulo é um retângulo. Tem até uma atividade que eu trabalho que é de adivinhação das figuras geométricas e que diz assim: “tenho dois lados pequenos e dois maiores. Faça um ‘x’ em mim. E aí tem várias figuras e junto o retângulo, então a figura certa é o retângulo. E para o quadrado a frase é: tenho quatro lados iguais. Eu sou o ‘.....’. Agora eu vejo que esse exercício não está bem elaborado (PROFESSORA EVELYN).

A professora Milena também fez um comentário sobre isso, e afirmou:

Quando a gente aprende a definição dos quadriláteros, e do retângulo e do quadrado, a gente aprende tudo solto. Não tem uma relação entre eles, assim como você está fazendo. Por isso quando você pergunta para a gente, a gente até fala uma coisa ou outra (PROFESSORA MILENA).

Para Almeida (2000, p. 20), “muitos dos desafios enfrentados atualmente têm a ver com a fragmentação do conhecimento, que resulta tanto de nossa especialidade quanto, e principalmente, do processo educacional do qual participamos”. Essa fragmentação também acaba por ser responsável pelo surgimento de muitos obstáculos didáticos e, conseqüentemente, epistemológicos criados na escola básica sobre o conceito de quadriláteros e de figuras planas.

Conjecturamos que a explicitação das professoras, acerca desse tema, vai ao encontro das justificativas dadas por esse autor, o que ressalta a necessidade de que essas discussões sejam feitas e problematizadas ao longo de sua formação, seja ela inicial ou continuada.

Diante das lacunas em relação aos conhecimentos matemáticos mobilizados pelas professoras, observamos a importância das discussões ocorridas neste encontro e que envolveram a Categoria Epistêmica. Para Pino-Fan e Godino (2015) é importante que o professor seja capaz de mobilizar diversas representações de um determinado objeto matemático para resolver uma atividade. Para esses autores, o conhecimento que está relacionado a essa categoria é um conhecimento especializado da Dimensão Matemática. Ele é um conhecimento matemático que vai além daquele necessário para resolver problemas, ou seja, ele é um conhecimento que envolve justificações e argumentações matemáticas para o trabalho com conteúdos matemáticos.

Para Ma (1999), a compreensão desse conhecimento especializado da Dimensão Matemática implica que o professor seja capaz de: (i) conhecer as ideias matemáticas; (ii) fazer as relações necessárias entre os objetos matemáticos; (iii) trabalhar com as múltiplas representações desses objetos; e (iv) apresentar uma coerência longitudinal em relação a esses objetos. Esse conhecimento, ao qual podemos nos referir como sendo um conhecimento *da* e *sobre* a matemática, demonstra a necessidade de o professor gerenciar as situações de aprendizagem, sem perder de vista a necessidade de refletir sobre elas.

Observamos que, quando as professoras são confrontadas com discussões como essas, elas percebem que esse conhecimento especializado da Dimensão Matemática contribui, como citamos anteriormente, para que elas selecionem representações significativas para seus alunos, além de possibilitar que elas tenham melhores condições para apresentar questões esclarecedoras para eles.

ANALISANDO A INTENCIONALIDADE DESSE ENCONTRO

A discussão foi iniciada a partir de um questionamento do formador sobre o trabalho das professoras, em sala de aula, com as figuras geométricas e, em particular, com os quadriláteros.

O formador buscou elementos para analisar como as professoras abordavam, e se abordavam o trabalho com essas figuras planas em sala de aula.

Destacamos a intencionalidade de se problematizar os conhecimentos das professoras em relação à Categoria Epistêmica, considerando-se que por meio da explicitação das professoras seria possível compreender como elas mobilizavam seus conhecimentos para desenvolver trabalhos em sala de aula com esse conteúdo matemático e, principalmente, buscar elementos que pudessem revelar como elas lidavam com os possíveis obstáculos didáticos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da geometria plana nos anos iniciais.

A literatura acerca dos obstáculos didáticos no ensino e aprendizagem da geometria plana nos revela que um desses obstáculos surge a partir da prática de representação das figuras geométricas, em especial nos livros didáticos, ou na lousa, por meio de figuras construídas sempre numa mesma posição. O que se percebe é que essa prática induz os alunos a uma concepção errônea, provocando dificuldades e, em certos casos, a incapacidade de reconhecimento dessas figuras quando colocadas em outras posições.

A fala da professora Milena, quando ela se refere ao paralelogramo, e comenta sobre a necessidade de ele possuir um par de lados opostos “inclinados”, pode ser vista como um retrato do efeito nocivo dessa prática. Como se trata de uma professora, podemos concluir que ao abordar esse tema com seus alunos, essa prática será perpetuada e, em um movimento cíclico, seus alunos, provavelmente, enfrentarão as mesmas dificuldades para o reconhecimento das figuras planas, como a dificuldade que ela explicitou ter.

Em diversos momentos, ao longo desse encontro, as professoras revelaram uma tendência à preservação de uma forma particular de representação de algumas figuras geométricas, e essa preservação pode ser vista como indícios da influência da formação inicial delas. Um dos problemas associados a essa constatação é o fato da possível reprodução dessa situação em suas salas de aula, como comentamos no parágrafo anterior. No relato da professora Evelyn que reproduzimos, pudemos constatar essa prática.

Essas problematizações estão relacionadas com a Categoria Epistêmica, pois essa categoria preocupa-se com um conhecimento que precisa se apresentar de forma aprofundada e coerente para o ensino.

Como citamos anteriormente, o professor precisa ter um conhecimento que lhe permita

compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um único objeto matemático [...] para fornecer várias justificativas e argumentações, e identificar o conhecimento em jogo durante o processo de resolver uma tarefa matemática (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015, p. 1434) [tradução nossa].

O conhecimento relacionado com essa categoria contribui para que as professoras tenham uma compreensão dos objetos matemáticos, suas relações e suas propriedades, conduzindo à construção de conceitos geométricos e contribuindo para a reflexão sobre a sua prática.

A abordagem tomada pelo formador buscou evidenciar, para as professoras, a necessidade de que elas lidem com os objetos matemáticos do ponto de vista de sua compreensão e não de sua

capacidade de memorização. A capacidade de compreensão é um fator que pode ser associado à Categoria Epistêmica, pois, a partir da compreensão dos objetos matemáticos, as professoras podem ser capazes de relacionar diversos objetos matemáticos entre si, compreender a diversidade de significados parciais para um único objeto matemático, bem como articular, com maior propriedade suas justificativas e argumentações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos considerar que por meio da problematização e a realização das atividades propostas as professoras foram envolvidas em um ambiente que possibilitou que elas refletissem sobre sua prática, discutissem conteúdos matemáticos, bem como possibilidades pedagógicas para o trabalho com a matemática na sala de aula. O envolvimento das professoras se deu por meio das discussões sobre suas concepções, discutindo-se o ensino e a aprendizagem da matemática e criando-se oportunidades de novas discussões acerca de seus conhecimentos didático-matemáticos.

Sobremaneira, destacamos que as discussões e problematizações realizadas contribuíram para que as professoras se envolvessem em um processo de constituição, enquanto sujeitos de seus próprios conhecimentos. Nesse sentido, o encontro de formação que apresentamos nesse artigo provocaram-nas de forma que elas olhassem para a sua relação com o ensino e a aprendizagem da matemática, levando-as a refletirem sobre como ensinam essa disciplina, assim como a refletirem sobre sua própria relação com a matemática.

Ressaltamos que nossa preocupação em relação à aprendizagem das professoras não se resumiu a ensiná-las conteúdos matemáticos. Para além disso, tínhamos como objetivo discutir a importância dos conhecimentos relacionados às categorias do CDM. Por meio da exploração da atividade proposta, e por conseguinte, por meio do ambiente de Modelagem, evidenciamos que esse ambiente contribuiu para as discussões e reflexões relacionadas a essas categorias.

Nesse sentido, observamos que o formador procurou, durante o encontro, problematizações que evidenciassem a importância de as professoras se envolverem em um processo formativo que lhes permitia desenvolver a compreensão *da* e *sobre* a matemática. As reflexões sobre essa importância permitiram que as professoras observassem a necessidade de algumas competências e habilidades para o ensino da matemática. Essas competências não se referem, apenas, ao conhecimento dos conteúdos que elas ensinam, mas envolvem saber relacioná-los, tanto internamente à matemática como com outras áreas de conhecimento.

Por meio do ambiente de Modelagem, e as problematizações propostas pelo formador, as professoras tiveram a oportunidade de discutir e refletir sobre um conhecimento disciplinar relacionado ao que elas ensinam ou irão ensinar. Sobremaneira, ressaltamos que a formação foi conduzida de forma a possibilitar a aprendizagem das professoras para o ensino visando a compreensão conceitual em matemática, por meio de reflexões sobre as relações entre o conceito e os procedimentos a ele relacionados, ambos indispensáveis à compreensão matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer” modelagem na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (orgs). Práticas de modelagem matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 19-43.
- AMÂNCIO, R. A.; GAZIRE, E. S. O desenvolvimento do pensamento geométrico e as contribuições dos recursos didáticos no estudo dos quadriláteros. *Vidya*. v. 35, n. 2, 2015.
- BALL, D. L.(1991). Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education. Tese. Michigan State University. Disponível em: <http://www.personal.umich.edu/~dball/>. Acesso em 02 fev. 2013.
- _____ (2000). Bridging practices: intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*. v. 51, n.3, pp. 241-247.
- BALL, D.L., HILL, H.C.; SCHILING, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teacher’s topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), pp. 372-400.
- BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: <<http://jte.sagepub.com/content/59/5/389.short>>. Acesso em: 10/out./2013.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, Rio Claro, no. 15, 2001.
- _____. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 24, 2001a, Caxambu. Anais... Minas Gerais: ANPED, 2001a. p. 1-30. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf>. Acesso em: 20/out./2012.
- _____. Modelagem matemática e os futuros professores. In: Reunião Anual da ANPED, 25, 2002, Caxambu. Anais...Caxambu.
- _____. Mathematical modeling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.
- _____. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. Cap. 10, p. 161-174.
- CALDEIRA, A. D. (2009). Modelagem matemática: um outro olhar. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.2, n. 2, pp. 33-54.
- CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática*. n. 115, pp. 11- 17, Nov/Dez 2011

GODINO, J.D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. n. 20, p. 13-31, dez./2009. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf>. Acesso em: 15/dez./2014.

MA, L. Saber e ensinar matemática elementar. Tradução de Sara Lemos e Ana Sofia Duarte. Lisboa: Gradiva, 2009.

MINAYO, M. C. S. (Org.) Pesquisa social: teoria, método e criatividade. 6 ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1994.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. A Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: Reunião Anual da ANPED, 23, 2000, Caxambu. Anais... Minas Gerais: ANPED, 2000, p. 1-16. Disponível em: <<http://23reuniao.anped.org.br/textos/1919t.PDF>> Acesso em: 05/maio/2012.

PASSOS, C.L.B. Formação matemática de professores dos anos iniciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 11. Curitiba. Anais... Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: <http://sbem.esquiro.ghost.net/anais/XIENEM/pdf/1124_2199_ID.pdf>. Acesso em: 05/jul./2014.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*. v. xxxvi, n.1. p. 87-109, jun./2015. Disponível em: <<http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/2662>>. Acesso em: 12/dez./2015.

PINO-FAN, L. R.; ASSIS, A.; CASTRO, W. F. Towards a methodology for the characterization of teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*. v. 11, n. 6. p. 1429-1456, 2015. <Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/279914902>>. Acesso em: 12/dez./2015.

SHULMAN, L. Those Who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. v. 15, no. 2, p. 4-14, 1986.

_____. Knowledge and Teaching: foundations of the reform. *Harvard Education Review*, v.57. n.. 1, p. 1987.

STYLIANOU, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.

SOUSA, E.G.; BARBOSA, J.C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na Modelagem Matemática. *Zetetiké- FE/Unicamp*. v. 22, n. 41. p. 31-58, 2014.

TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 16, n. 1. p. 209-225. 2014.



RIBEIRO R. M.; POWELL A. B. Modelagem matemática e o conhecimento matemático para o ensino: uma discussão sobre representações matemáticas na formação continuada de professores que ensinam matemática. *Revista @mbienteeducação*. São Paulo: Universidade Cidade de São Paulo, v. 11, n. 1, p. 45-65 jan./abr. 2018.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*. n. 20, p. 181-207, 2012.

VALÉRIO, N. Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1o. Ciclo. *Quadrante*. v.14, n. 1. 2005.

RECEBIMENTO: 16/08/2017

APROVAÇÃO: 28/09/2017

SOBRE OS AUTORES:

Rogério Marques Ribeiro é mestre em Educação Matemática e doutor em Educação. Professor do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. rogeriomarques@me.com

Arthur Belford Powell é professor associado de Educação Matemática no Departamento de Educação Urbana da Rutgers University e diretor associado do Robert B. Davis Institute for Learning of the Graduate School of Education. powellab@andromeda.rutgers.edu